Autovalores e Autovetores

Laura Goulart

UESB

21 de Maio de 2018

26-Autovalores e autovetores

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Considere $T \in L(V)$ e diremos que $v \in V$ não nulo é um **autovetor** de T quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. O escalar λ é denominado **autovalor** de T associado ao autovetor v.

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita. Considere $T \in L(V)$ e diremos que $v \in V$ não nulo é um **autovetor** de T quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(v) = \lambda v$. O escalar λ é denominado **autovalor** de T associado ao autovetor v.

Proposição (26.1)

O conjunto $V(\lambda) = \{v \in V / T(v) = \lambda v\}$ é um subespaço de V chamado **autoespaço** *de λ.*

Exemplos

Exemplo (26.1)

$T \in L(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $T(x,y) = (x,-y)$.

Exemplos

Exemplo (26.1)

$T \in L(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $T(x, y) = (x, -y)$.

Exemplo (26.2)

Verifique que $u = (1, 1)$ *é um autovetor de* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemplos

Exemplo (26.1)

$T \in L(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $T(x, y) = (x, -y)$.

Exemplo (26.2)

Verifique que $u = (1, 1)$ *é um autovetor de* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exemplo (26.3)

Verifique que $\lambda = 5$ *é um autovalor de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Cálculo dos autovalores de um operador linear

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow T(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow T(v) - \lambda I(v) = 0 \Leftrightarrow ([T]_B - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ este sistema homogêneo tem solução não trivial $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow det([T]_B - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ é raíz do polinômio $p_T(t) = det([T]_B - tI_n)$,

chamado de polinômio característico de T

Exemplo (26.4)

$T \in L(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $T(x, y) = (-x - y, -3x + y)$

Exemplos

Exemplo (26.4)

$T \in L(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $T(x, y) = (-x - y, -3x + y)$

Exemplo (26.5)

$T \in L(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $T(x, y, z) = (-x, 2y, x - y + 3z)$

Exemplo (26.4)

$T \in L(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $T(x, y) = (-x - y, -3x + y)$

Exemplo (26.5)

$T \in L(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $T(x, y, z) = (-x, 2y, x - y + 3z)$

Exemplo (26.6)

$T \in L(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $T(x, y, z) = (3x, 2y, y + 2z)$

Exemplos

Exemplo (26.4)

$T \in L(\mathbb{R}^2)$ *tal que* $T(x, y) = (-x - y, -3x + y)$

Exemplo (26.5)

$T \in L(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $T(x, y, z) = (-x, 2y, x - y + 3z)$

Exemplo (26.6)

$T \in L(\mathbb{R}^3)$ *tal que* $T(x, y, z) = (3x, 2y, y + 2z)$

Exemplo (26.7)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

27-Multiplicidade dos autovalores

A **multiplicidade algébrica** de um autovalor λ é a multiplicidade do autovalor como raíz do polinômio característico e denota-se por $m_a(\lambda)$.

27-Multiplicidade dos autovalores

A **multiplicidade algébrica** de um autovalor λ é a multiplicidade do autovalor como raíz do polinômio característico e denota-se por $m_a(\lambda)$.
A **multiplicidade geométrica** de um autovalor λ é a dimensão do autoespaço de λ e denota-se por $m_g(\lambda)$.

A **multiplicidade algébrica** de um autovalor λ é a multiplicidade do autovalor como raíz do polinômio característico e denota-se por $m_a(\lambda)$.
A **multiplicidade geométrica** de um autovalor λ é a dimensão do autoespaço de λ e denota-se por $m_g(\lambda)$.

Observação

$$m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

Proposição (28.1)

Autovetores associados a autovalores distintos são l.i.

Proposição (28.1)

Autovetores associados a autovalores distintos são l.i.

A demonstração é por indução sobre $n = dimV$.

Proposição (28.1)

Autovetores associados a autovalores distintos são l.i.

A demonstração é por indução sobre $n = dim V$.

Proposição (28.2)

Suponha que $dim V = n < \infty$. *Se* $T \in L(V)$ *possui n autovalores distintos, então* $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *formado pelos correspondentes autovetores de T é uma base de V.*

Quando a base de autovetores existe, diremos que T é **diagonalizável** e podemos observar que a matriz de T com relação a esta base tem a seguinte forma:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Quando a base de autovetores existe, diremos que T é **diagonalizável** e podemos observar que a matriz de T com relação a esta base tem a seguinte forma:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Observação (28.1)

T é diagonalizável sse $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i), \forall i = 1, 2, \ldots, n$

29-Matrizes Semelhantes

Diremos que as matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são **semelhantes** quando existe uma matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.

Diremos que as matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são **semelhantes** quando existe uma matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.

Exemplo (29.1)

As matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ *são semelhantes.*

Propriedades

MS1) As matrizes possuem o mesmo determinante.

Propriedades

MS1) As matrizes possuem o mesmo determinante.

MS2) $PA = BP$

Propriedades

MS1) As matrizes possuem o mesmo determinante.

MS2) $PA = BP$

MS3) As matrizes possuem os mesmos autovalores, porém os autovetores correspondentes não são necessariamente os mesmos.

Propriedades

MS1) As matrizes possuem o mesmo determinante.

MS2) $PA = BP$

MS3) As matrizes possuem os mesmos autovalores, porém os autovetores correspondentes não são necessariamente os mesmos.

MS4) As matrizes possuem o mesmo traço.

Proposição

Seja V um espaço vetorial real com $dimV < +\infty$. Considere B, C bases de V e tome $T \in L(V)$. Então, $[T]_B = M \cdot [T]_C \cdot M^{-1}$, onde M é a matriz mudança da base B para a base C.

Proposição

Seja V um espaço vetorial real com $\dim V < +\infty$. Considere B, C bases de V e tome $T \in L(V)$. Então, $[T]_B = M \cdot [T]_C \cdot M^{-1}$, onde M é a matriz mudança da base B para a base C.

Observação (29.1)

Se C é a base canônica então as colunas da matriz mudança da base B para a canônica são as coordenadas dos autovetores de T.

Dizemos que $A \in M_n(\mathbb{R})$ é **diagonalizável** quando A é semelhante a uma matriz diagonal.

Dizemos que $A \in M_n(\mathbb{R})$ é **diagonalizável** quando A é semelhante a uma matriz diagonal.

Exemplo (30.1)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *é diagonalizável.*

Dizemos que $A \in M_n(\mathbb{R})$ é **diagonalizável** quando A é semelhante a uma matriz diagonal.

Exemplo (30.1)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *é diagonalizável.*

Proposição (30.1)

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável sse A tem n autovetores l.i.

Nem todo operador linear é diagonalizável, contudo é possível encontrar uma base B de V no qual $[T]_B$ é "próxima"de uma matriz diagonal.
Em outras palavras, dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, existe uma matriz invesível $M \in M_n(\mathbb{R})$ tal que

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} J1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix},$$ onde cada um dos blocos

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$ chamados **blocos de Jordan.**

Observações

31.1) Para se construir a forma canônica de Jordan é necessário conhecer as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores.

Observações

31.1) Para se construir a forma canônica de Jordan é necessário conhecer as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores.

31.2) O número de blocos é igual à soma das multiplicidades geométricas dos autovalores.

Observações

31.1) Para se construir a forma canônica de Jordan é necessário conhecer as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores.

31.2) O número de blocos é igual à soma das multiplicidades geométricas dos autovalores.

Observações

31.1) Para se construir a forma canônica de Jordan é necessário conhecer as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores.

31.2) O número de blocos é igual à soma das multiplicidades geométricas dos autovalores.

31.3) O número de blocos associados a um mesmo autovalor é a multiplicidade geométrica dele.

Observações

31.1) Para se construir a forma canônica de Jordan é necessário conhecer as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores.

31.2) O número de blocos é igual à soma das multiplicidades geométricas dos autovalores.

31.3) O número de blocos associados a um mesmo autovalor é a multiplicidade geométrica dele.

31.4) A soma das ordens dos blocos associados a um mesmo autovalor é a multiplicidade algébrica dele.

Observações

31.1) Para se construir a forma canônica de Jordan é necessário conhecer as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores.

31.2) O número de blocos é igual à soma das multiplicidades geométricas dos autovalores.

31.3) O número de blocos associados a um mesmo autovalor é a multiplicidade geométrica dele.

31.4) A soma das ordens dos blocos associados a um mesmo autovalor é a multiplicidade algébrica dele.

31.5) A soma das ordens de todos os blocos de Jordan é igual a ordem da matriz A.

Exemplo (31.1)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplo (31.1)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo (31.2)

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 5 & 11 \\ -2 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exemplo (31.3)

Consideremos uma matriz A de ordem 9, onde A possui quatro autovalores distintos tais que $m_a(\lambda_1) = 3, m_g(\lambda_1) = 1, m_a(\lambda_2) = 3, m_g(\lambda_2) = 2, m_a(\lambda_3) = 2, m_g(\lambda_3) = 1, m_a(\lambda_4) = m_g(\lambda_4) = 1.$
Qual é a forma canônica de Jordan de A?